



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

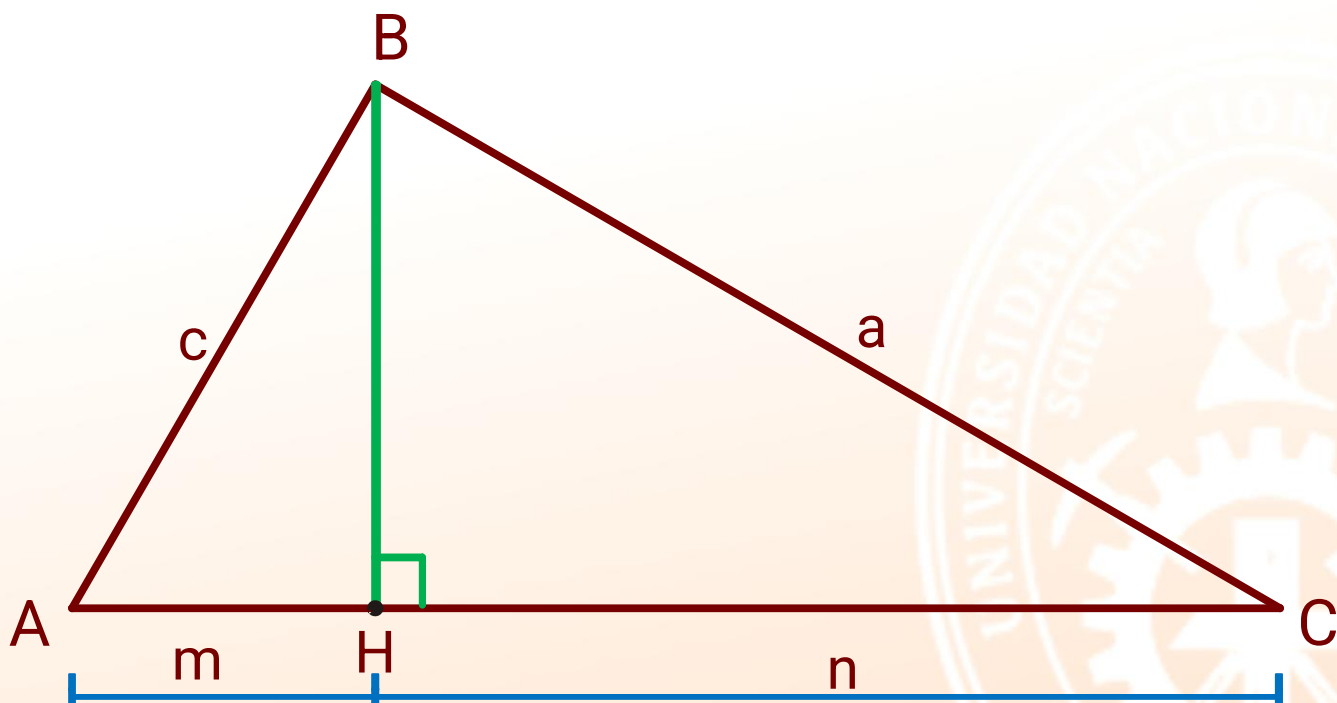
**RELACIONES METRICAS EN
TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS**

**CICLO
PRE
2024-1**



Teorema

En un triángulo la diferencia de los cuadrados de las longitudes de dos lados, es igual a la diferencia de los cuadrados de las longitudes de sus proyecciones sobre el tercer lado.



$$a^2 - c^2 = n^2 - m^2$$

Demostración:

Teorema de Pitágoras:

$$\triangle CHB: a^2 = (BH)^2 + n^2$$

$$\triangle AHB: c^2 = (BH)^2 + m^2$$

Restando:

$$\therefore a^2 - c^2 = n^2 - m^2$$

EJERCICIO 01

En un trapezoide ABCD, las diagonales son perpendiculares. Si $AB = 8\text{ u}$, $BC = 9\text{ u}$ y $CD = 7\text{ u}$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AD}$ es

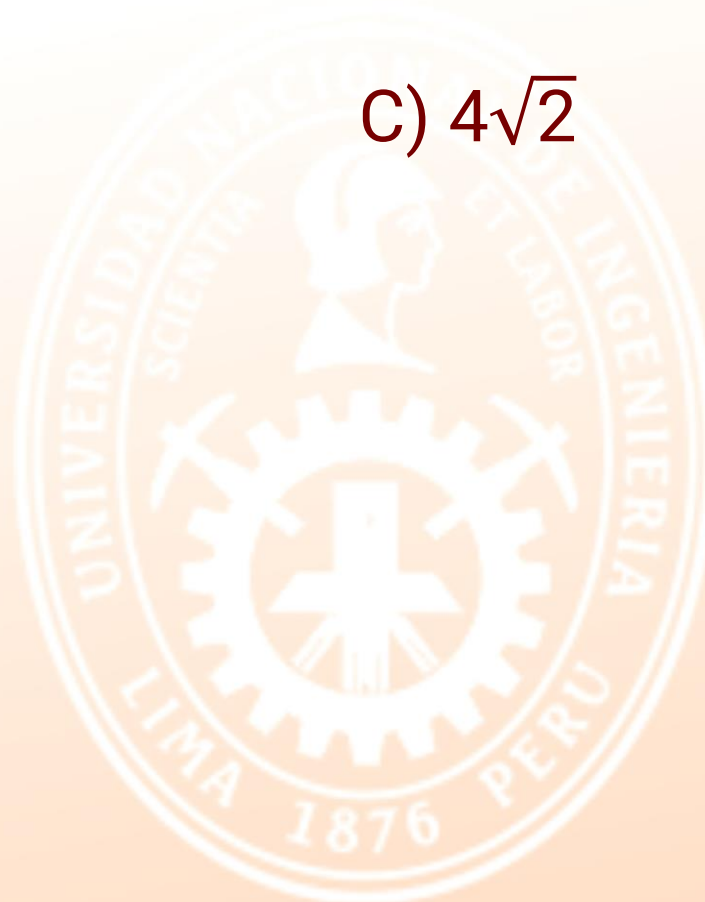
A) 7

B) 6

C) $4\sqrt{2}$

D) 4

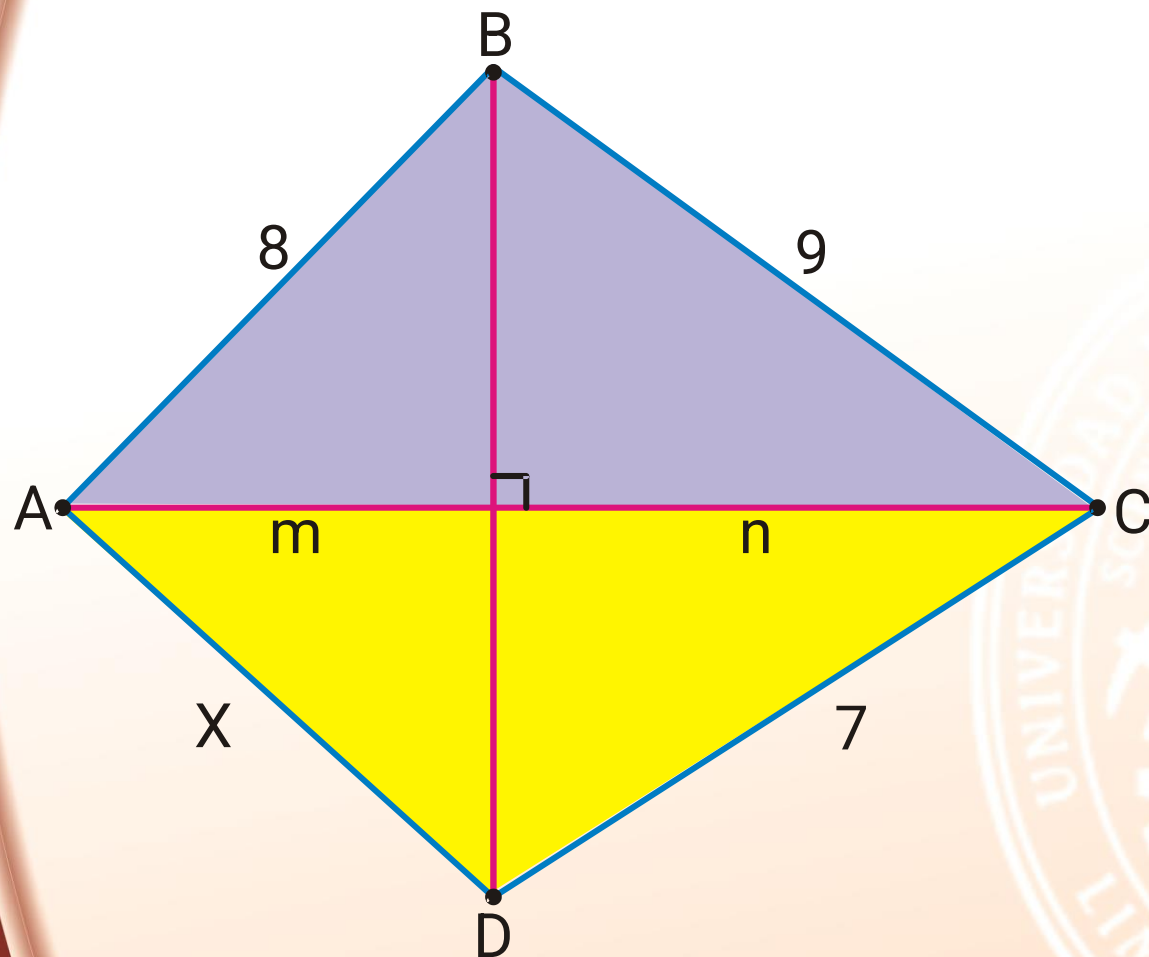
E) $3\sqrt{2}$



ce
pre
UNI

RESOLUCIÓN 02

En un trapezoide ABCD, las diagonales son perpendiculares. Si $AB = 8$ u, $BC = 9$ u y $CD = 7$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AD}$ es



Teorema ($\triangle ADC$):

$$7^2 - x^2 = n^2 - m^2$$

Teorema ($\triangle ABC$):

$$9^2 - 8^2 = n^2 - m^2$$

igualando:

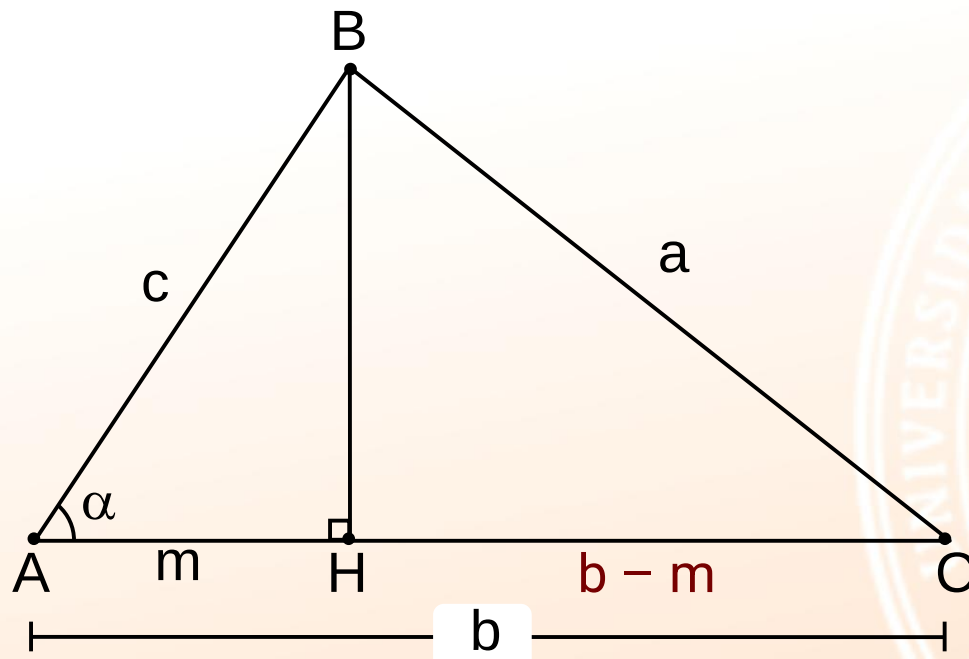
$$9^2 - 8^2 = 7^2 - x^2$$

$$\therefore x = 4\sqrt{2}$$

Clave: C

Teorema de la proyección

En un triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos dos veces el producto de las longitudes de uno de ellos y la proyección ortogonal del otro sobre aquel lado.



Demostración:

Teorema: $a^2 - c^2 = (b - m)^2 - m^2$

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2bm + m^2 - m^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

EJERCICIO 02

En un triángulo isósceles ABC ($BC = AC$), se traza la altura $\overline{BH}$, en $\overline{BH}$ se ubica el punto P , tal que $m\angle APC = 90^\circ$. Si $AP = 6$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AB}$ es

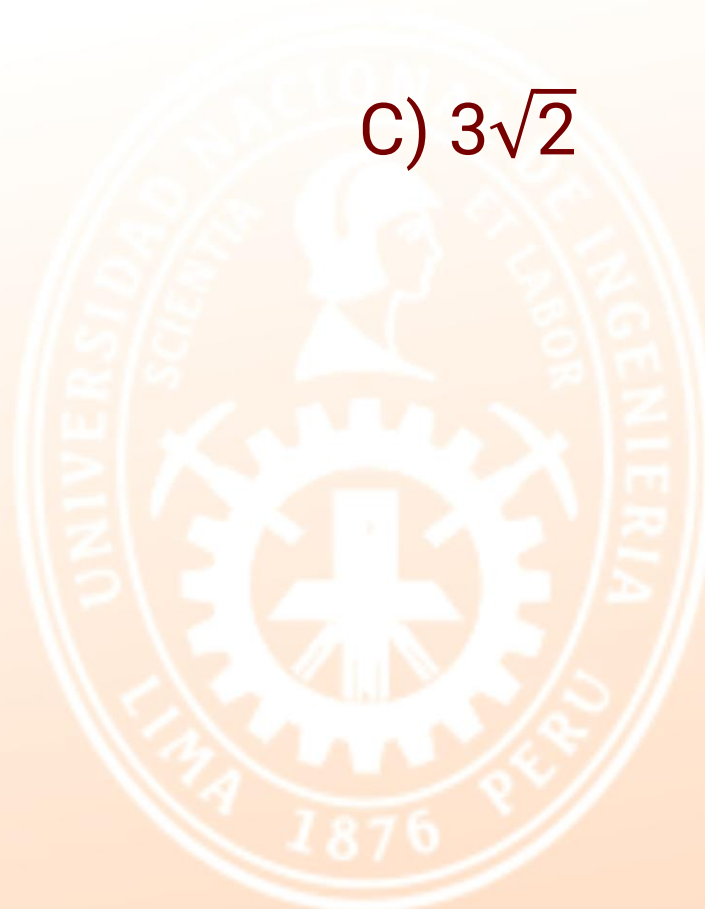
A) 9

B) 8

C) $3\sqrt{2}$

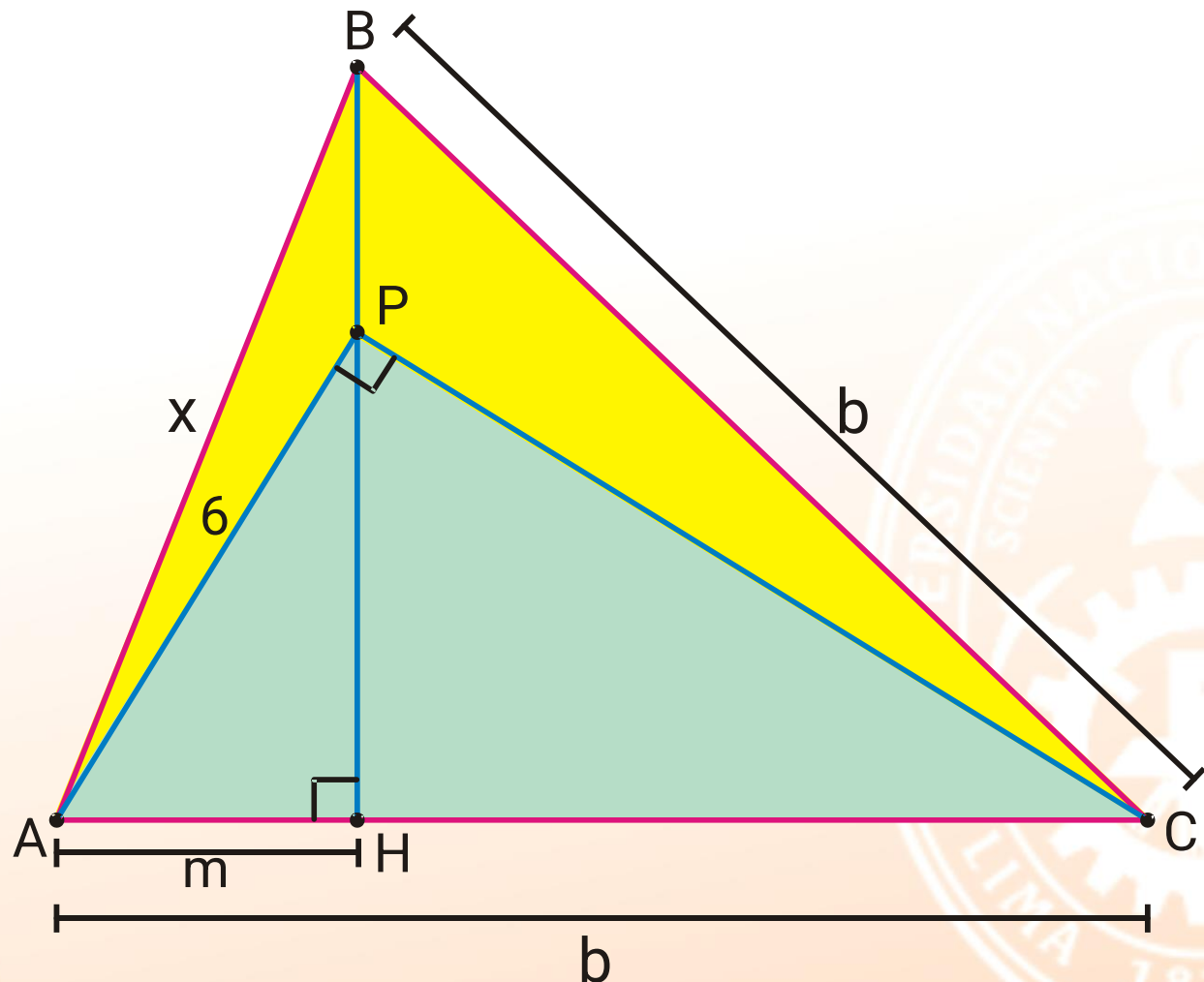
D) $4\sqrt{2}$

E) $6\sqrt{2}$



RESOLUCIÓN 02

En un triángulo isósceles ABC ($BC = AC$), se traza la altura $\overline{BH}$, en $\overline{BH}$ se ubica el punto P, tal que $m\angle APC = 90^\circ$. Si $AP = 6$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AB}$ es



Teorema ($\triangle APC$):

$$6^2 = (AC)(AH) = b m$$

Teorema de las proyecciones

$$b^2 = x^2 + b^2 - 2bm$$

$$x^2 = 2bm$$

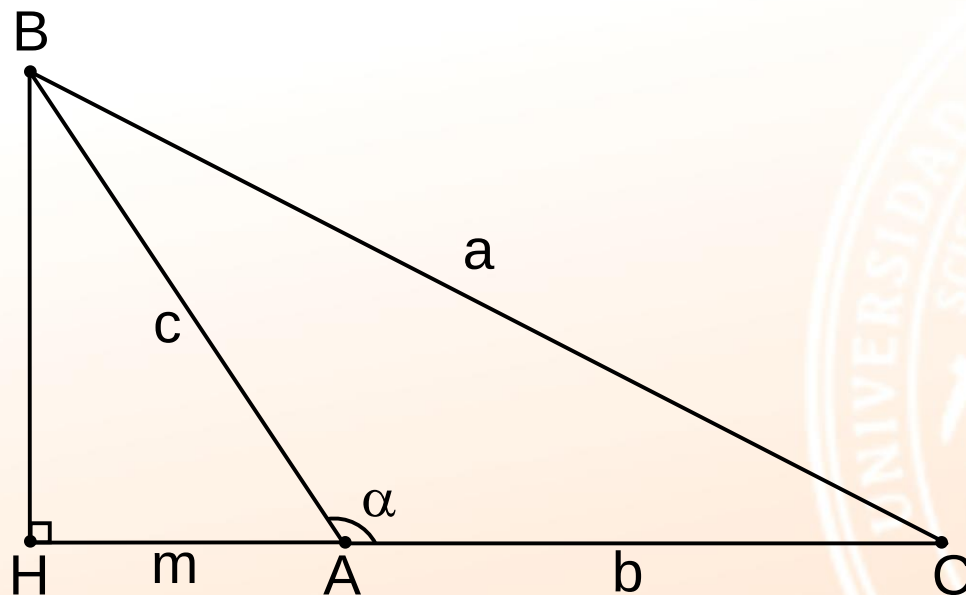
Reemplazando:

$$\therefore x = 6\sqrt{2}$$

Clave: E

Teorema de la proyección

En un triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, más dos veces el producto de las longitudes de uno de ellos y la proyección ortogonal del otro sobre aquel lado.



Demostración:

Teorema: $a^2 - c^2 = (b + m)^2 - m^2$

$$a^2 - c^2 = b^2 + 2bm + m^2 - m^2$$

$$a^2 - c^2 = b^2 + 2bm$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

EJERCICIO 03

Dos circunferencias de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son concéntricas en el punto O ($AB > CD$), en los arcos AB y CD se ubican los puntos M y N tal que $\overline{MN} \perp \overline{AB}$, $\overline{MN} \cap \overline{CD} = \{E\}$ y $(A - C - E)$. Si $MD^2 - AN^2 = 30 u^2$, entonces $(AD)(OE)$ (en u^2) es

A) 10

B) 12

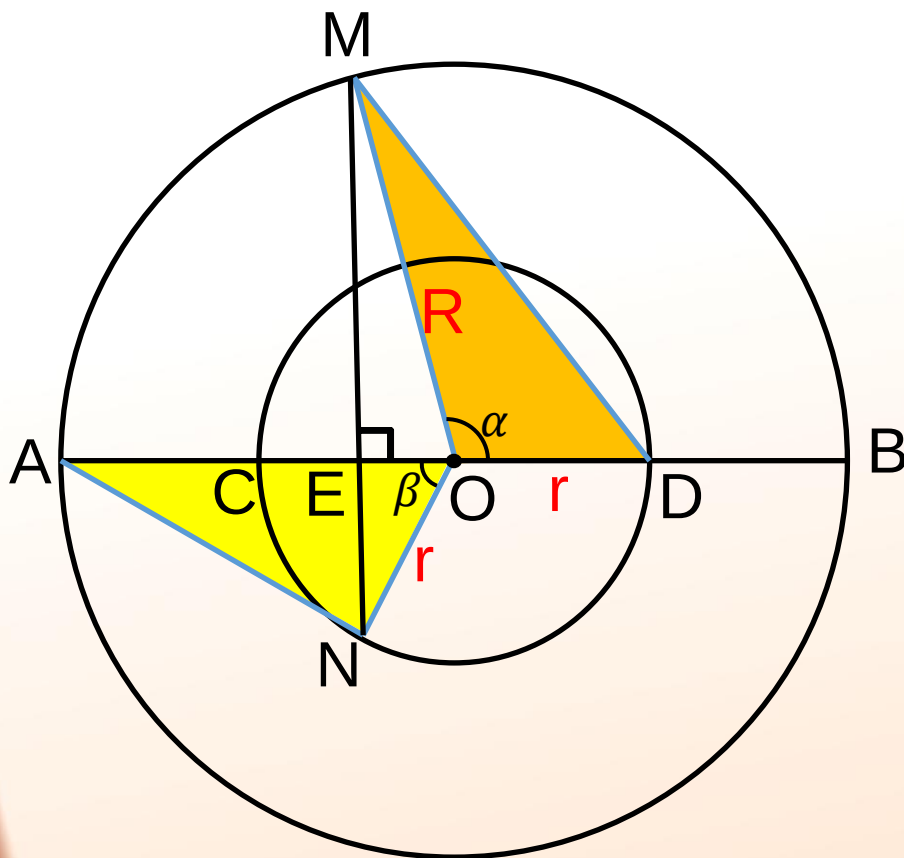
C) 15

D) 18

E) 20

RESOLUCIÓN 03

Dos circunferencias de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son concéntricas en el punto O ($AB > CD$), en los arcos AB y CD se ubican los puntos M y N tal que $\overline{MN} \perp \overline{AB}$, $\overline{MN} \cap \overline{CD} = \{E\}$ y $(A - C - E)$. Si $MD^2 - AN^2 = 30 \text{ u}^2$, entonces $(AD)(OE)$ (en u^2) es



Teorema de la proyección:

$$\Delta MOD: \alpha > 90$$

$$(MD)^2 = R^2 + r^2 + 2r(OE) \dots\dots(I)$$

$$\Delta AON: \beta < 90$$

$$(AN)^2 = R^2 + r^2 - 2R(OE) \dots\dots(II)$$

$$(I) - (II): (MD)^2 - (AN)^2 = 2(R + r)(OE)$$

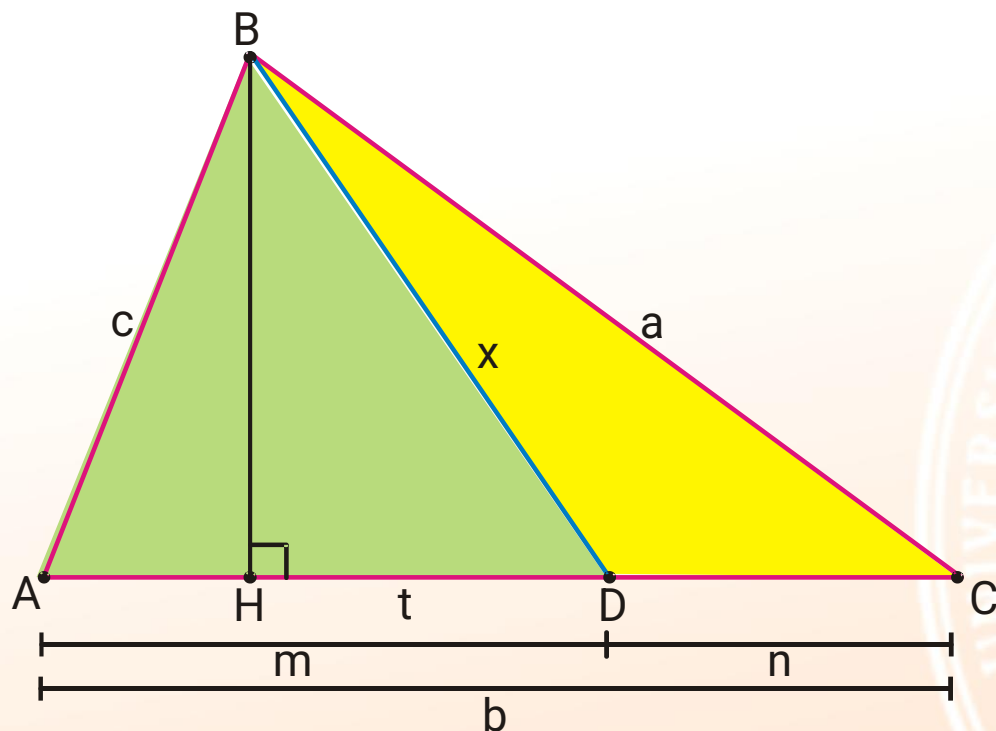
$$30 = 2(AD)(OE)$$

$$\therefore (AD)(OE) = 15$$

Clave: C

Teorema de Stewart

En un triángulo ABC se traza la ceviana BD. Si $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AD = m$ y $CD = n$, entonces se cumple: $a^2 m + c^2 n = x^2 b + m n b$



$$a^2 m + c^2 n = x^2 b + m n b$$

Demostración:

Teorema de la proyección:

$$\triangle ABD: c^2 = x^2 + m^2 - 2mt$$

$$\triangle BDC: a^2 = x^2 + n^2 + 2nt$$

$$c^2 n = x^2 n + m^2 n - 2m n t$$

$$a^2 m = x^2 m + n^2 m + 2n m t$$

Sumando:

$$a^2 m + c^2 n = x^2 (m + n) + n m (m + n)$$

$$\therefore a^2 m + c^2 n = x^2 b + m n b$$

EJERCICIO 04

En un trapecio ABCD, $\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{BC}$. si $BC = 1\text{ u}$, $AD = 5\text{ u}$, $AB = 2\text{ u}$ y $CD = 4\text{ u}$, entonces la longitud (en u) de la diagonal mayor es.

A) $2\sqrt{6}$

D) $\frac{7\sqrt{7}}{2}$

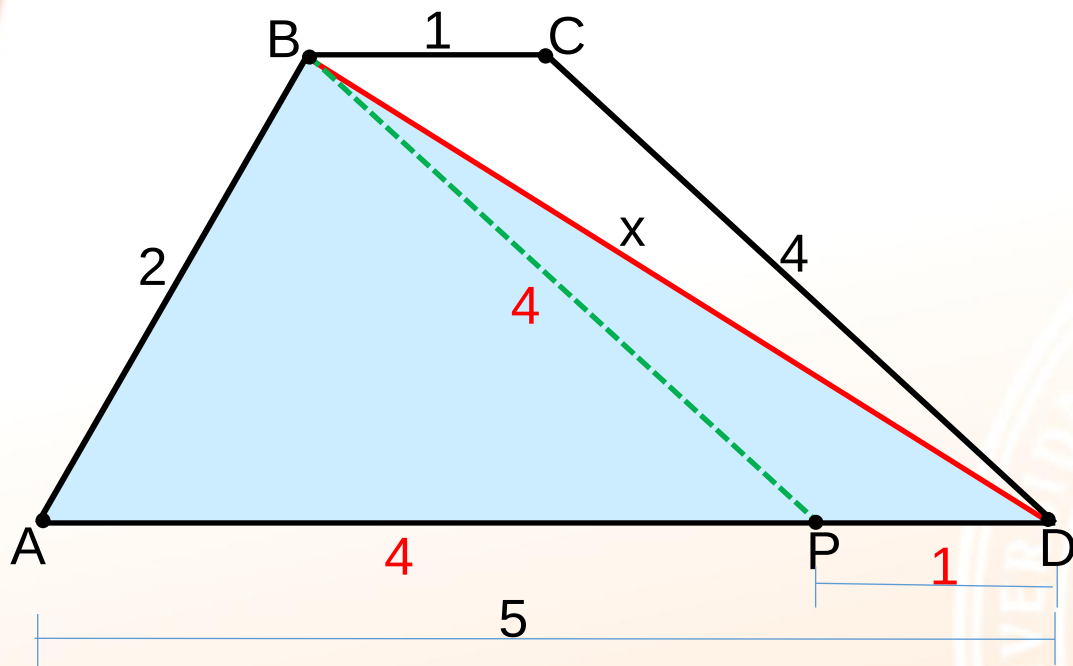
B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

E) $\frac{7\sqrt{10}}{2}$

C) $\frac{7\sqrt{5}}{2}$

RESOLUCIÓN 04

En un trapezio ABCD, $\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{BC}$. si $BC = 1$ u, $AD = 5$ u, $AB = 2$ u y $CD = 4$ u, entonces la longitud (en u) de la diagonal mayor es.



En el trapezio, la diagonal de mayor longitud es $\overline{BD}$: $BD = x$

Sea P pertenece a $\overline{AD}$ tal que $\overline{BP}$ es paralelo a $\overline{CD}$

□PBCD es un paralelogramo:
 $BP = 4$ y $PD = 1$

$\triangle ABD$: Teorema de Stewart

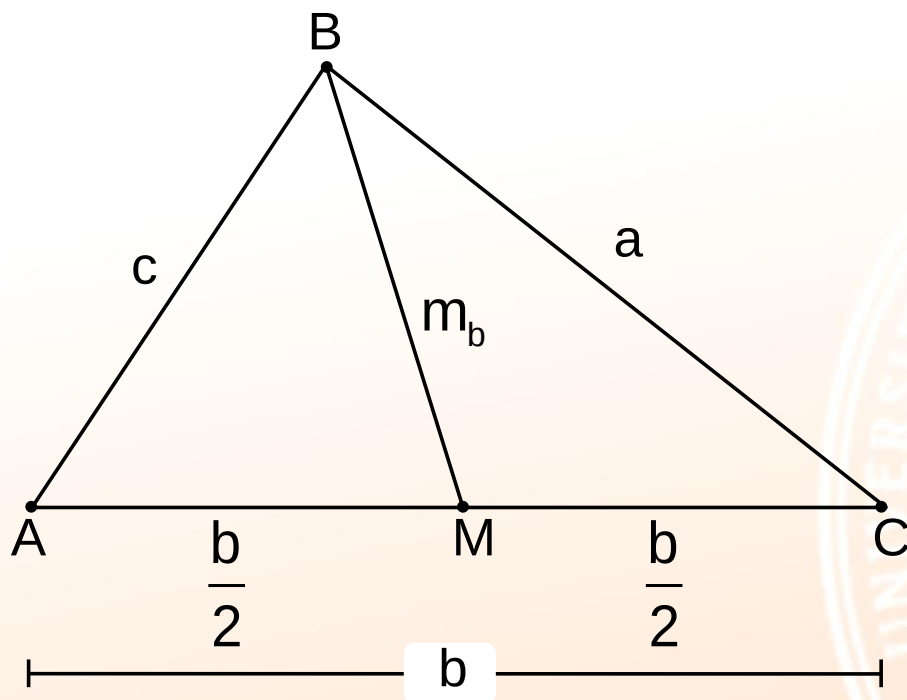
$$x^2(4) + 2^2(1) = 4^2(5) + (4)(1)(5)$$

$$\therefore x = 2\sqrt{6}$$

Clave: A

Teorema de la mediana

En un triángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual a dos veces el cuadrado de la longitud de la mediana relativa al tercer lado más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho lado.



$$a^2 + c^2 = 2(m_b)^2 + \frac{b^2}{2}$$

Demostración:

Teorema:

$$a^2 \left(\frac{b}{2} \right) + c^2 \left(\frac{b}{2} \right) = (m_b)^2 \cdot b + \left(\frac{b}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right) \cdot b$$

$$a^2 \left(\frac{b}{2} \right) + c^2 \left(\frac{b}{2} \right) = 2(m_b)^2 \cdot \left(\frac{b}{2} \right) + \left(\frac{b}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right) \cdot b$$

$$\therefore a^2 + c^2 = 2(m_b)^2 + \frac{b^2}{2}$$

EJERCICIO 05

Se tienen dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes exteriores en el punto E, se traza la tangente común exterior $\overline{AB}$, con el punto A en C_1 y el punto B en C_2 . El punto T es un punto exterior a dichas circunferencias tal que $\overline{TE}$ es tangente a las circunferencias siendo E un punto interior al triángulo ATB. Si $AB = TE$ y $(TA)^2 + (TB)^2 = 80 \text{ u}^2$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AB}$ es

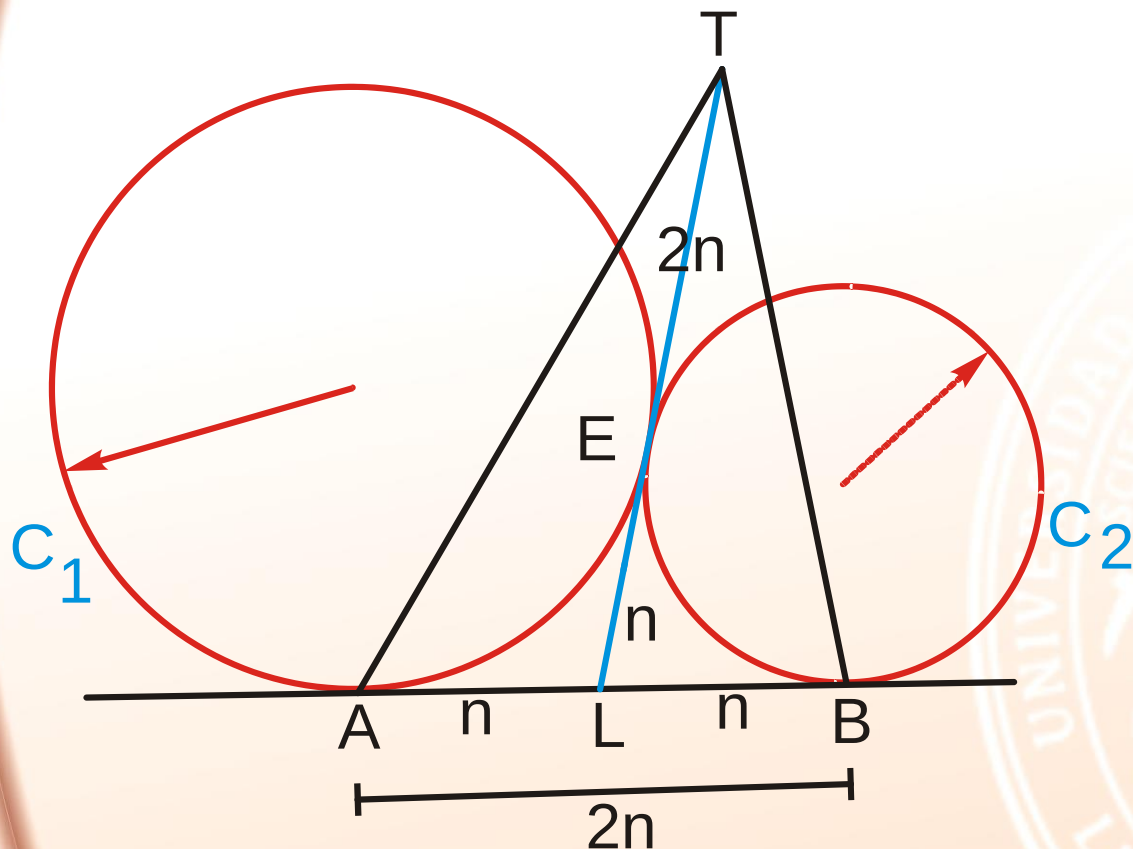
A) 10
D) 4

B) 8
E) 2

C) 6

RESOLUCIÓN 05

Se tienen dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes exteriores en el punto E, se traza la tangente común exterior $\overline{AB}$, con el punto A en C_1 y el punto B en C_2 . El punto T es un punto exterior a dichas circunferencias tal que $\overline{TE}$ es tangente a las circunferencias siendo E un punto interior al triángulo ATB. Si $AB = TE$ y $(TA)^2 + (TB)^2 = 80 u^2$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AB}$ es



Dato : $(TA)^2 + (TB)^2 = 80 u^2$

Piden: $AB = 2n$

Prolongamos $\overline{TE}$ hasta el punto L

$$\Rightarrow AL = LB = LE = n$$

ΔATB : teorema de la mediana

$$(TA)^2 + (TB)^2 = 2(TL)^2 + \frac{(AB)^2}{2}$$

Reemplazando:

$$80 = 2(3n)^2 + \frac{(2n)^2}{2}$$

$$\Rightarrow n = 2$$

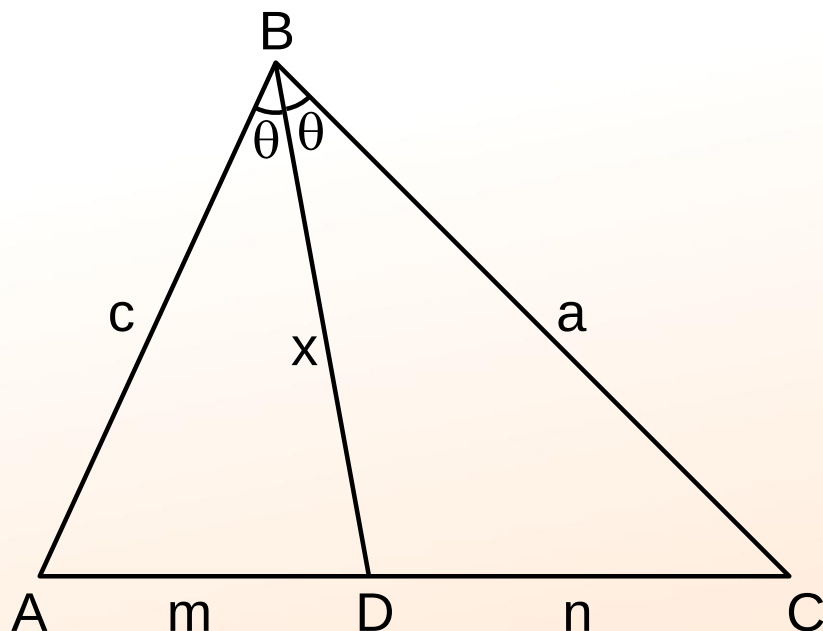
entonces: $AB = 2n = 2(2)$

$$\therefore x = 4$$

Clave: D

Teorema (longitud de una bisectriz interior)

En un triángulo, el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior es igual a la diferencia de los productos de las longitudes de los lados adyacentes a la bisectriz interior y los segmentos determinados por la bisectriz interior en el tercer lado.



$$x^2 = a c - m n$$

Demostración:

Teorema de Stewart:

$$a^2 \cdot m + c^2 \cdot n = x^2 \cdot (m + n) + mn(m + n)$$

$$a(a \cdot m) + c(c \cdot n) = x^2 \cdot (m + n) + mn(m + n)$$

Teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{a} \Rightarrow a m = c n$$

$$a(c n) + c(a m) = x^2 (m + n) + mn(m + n)$$

$$ac(m + n) = x^2 (m + n) + mn(m + n)$$

$$\therefore x^2 = a c - m n$$

EJERCICIO 06

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la mediana $\overline{BM}$, tal que $BD = DM$. Si $(AB)(BC) = 9 \text{ u}^2$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AC}$ es

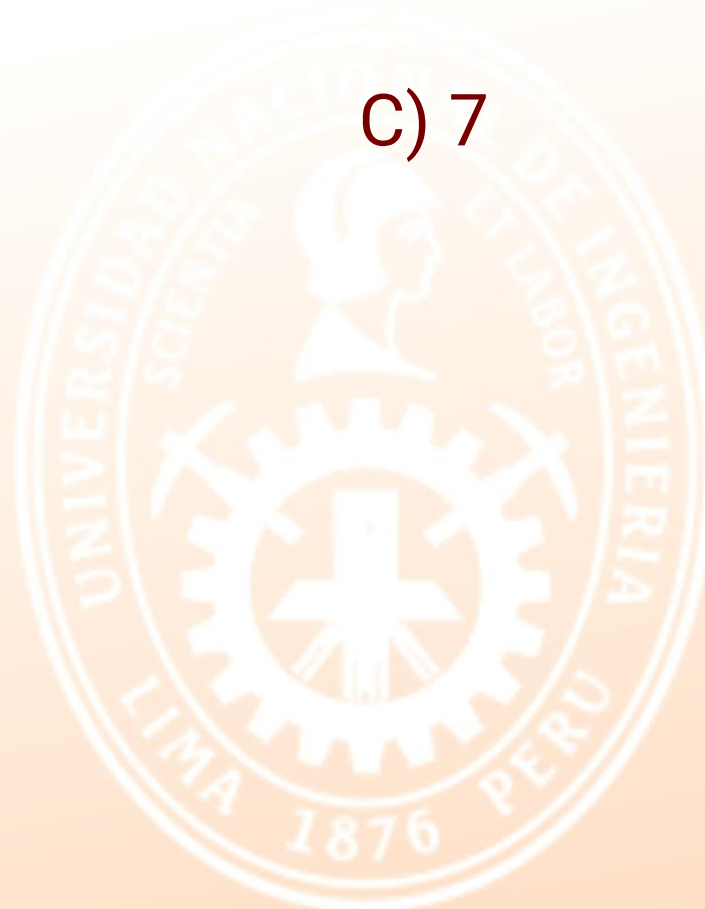
A) 9

B) 8

C) 7

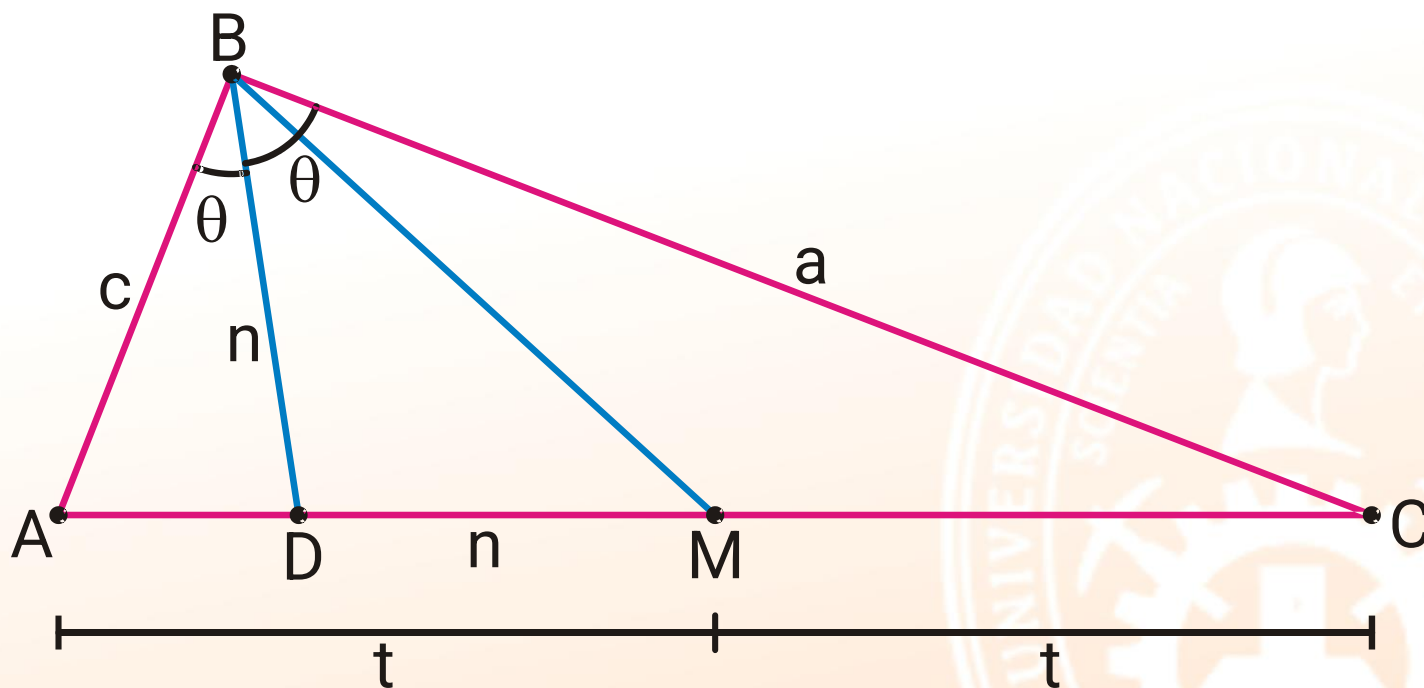
D) 6

E) 3

ce
pre
UNI

RESOLUCIÓN 06

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la mediana $\overline{BM}$, tal que $BD = DM$. Si $(AB)(BC) = 9 \text{ u}^2$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AC}$ es



$$(AB)(BC) = 9 = ac$$

Teorema:

$$(BD)^2 = (AB)(BC) - (AD)(DC)$$

$$n^2 = ac - (t - n)(t + n)$$

$$n^2 = ac - (t^2 - n^2)$$

$$n^2 = ac - t^2 + n^2$$

$$t^2 = ac$$

$$t^2 = 9 \Rightarrow t = 3$$

$$\therefore AC = 6$$

Clave: D

Teorema (longitud de la bisectriz exterior)

Si en un triángulo se traza una bisectriz exterior, entonces el cuadrado de la longitud de la bisectriz exterior es igual a la diferencia de los productos de las longitudes de los segmentos determinados en el lado opuesto y los lados adyacentes a la bisectriz exterior.

Demostración:

Teorema de Stewart:

$$x^2 \cdot (m - n) + c^2 \cdot n = a^2 \cdot m + mn(m - n)$$

$$x^2 \cdot (m - n) + c(c \cdot n) = a(a \cdot m) + mn(m - n)$$

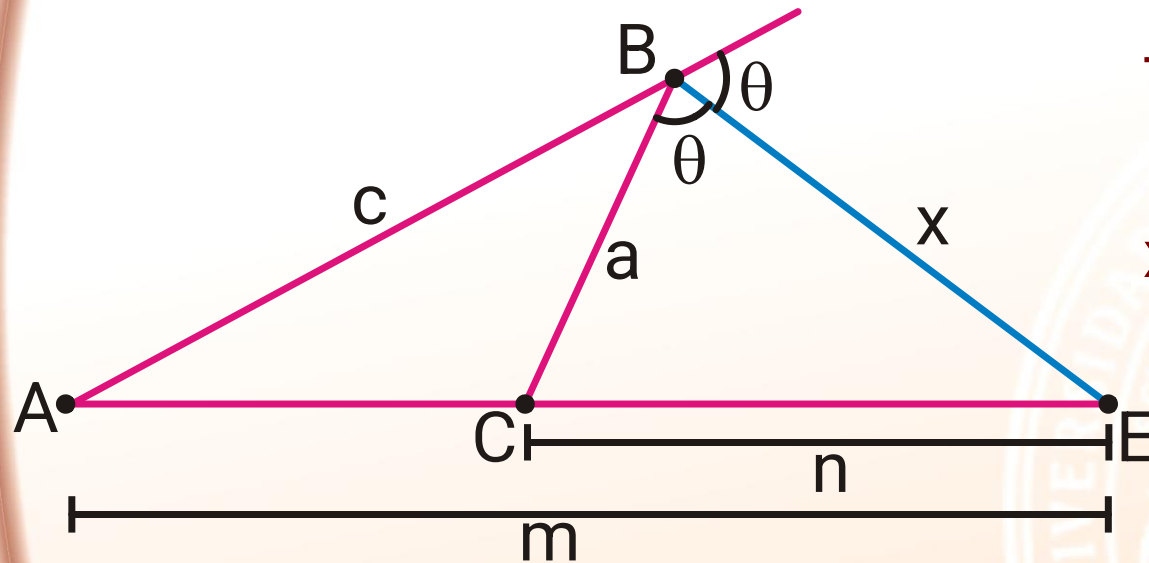
Teorema de la bisectriz exterior:

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{a} \Rightarrow a \cdot m = c \cdot n$$

$$x^2 \cdot (m - n) + c(a \cdot m) = a(c \cdot n) + mn(m - n)$$

$$ac(\cancel{m} - n) = (\cancel{m} - n)(mn - x^2)$$

$$\therefore x^2 = mn - ac$$



$$x^2 = mn - ac$$

EJERCICIO 07

Un cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia, las prolongaciones de $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$ se intersecan en el punto P y la recta tangente a la circunferencia trazada por D es paralela a $\overline{AC}$. Si $(PD)(CD) = 100 \text{ u}^2$ y $(AB)(PB) = 36 \text{ u}^2$, entonces la longitud (en u) de $\overline{BD}$ es

A) 10

B) 9

C) 8

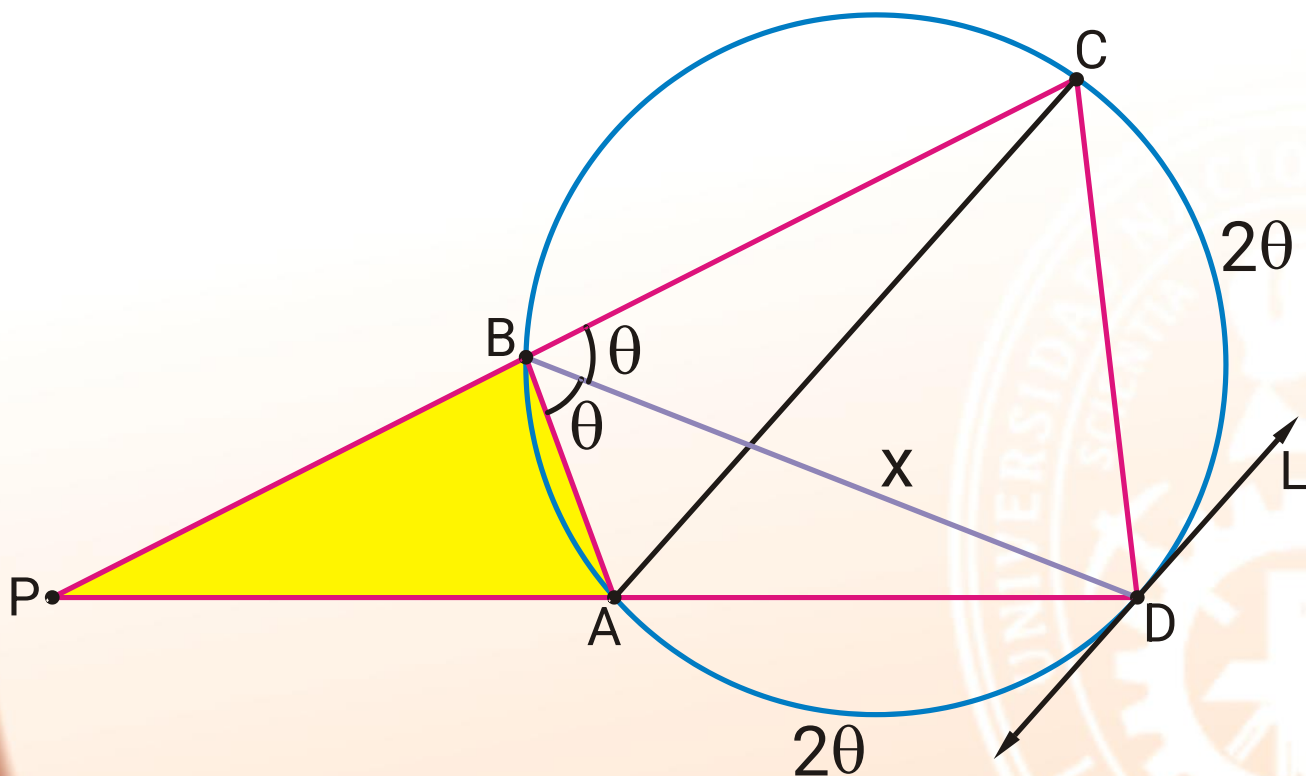
D) 7

E) 6



RESOLUCIÓN 07

Un cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia, las prolongaciones de $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$ se intersecan en el punto P y la recta tangente a la circunferencia trazada por D es paralela a $\overline{AC}$. Si $(PD)(CD) = 100 \text{ u}^2$ y $(AB)(PB) = 36 \text{ u}^2$, entonces la longitud (en u) de $\overline{BD}$ es



$$(PD)(CD) = 100 \text{ y } (AB)(PB) = 36$$

$$L \parallel \overline{AC} \Rightarrow m\widehat{AD} = m\widehat{CD} = 2\theta$$

$$AD = CD \Rightarrow (PD)(AD) = 100$$

$$m\angle ABD = m\angle CBD = \theta$$

Teorema ($\triangle PBA$):

$$x^2 = (PD)(AD) - (AB)(PB)$$

Reemplazando:

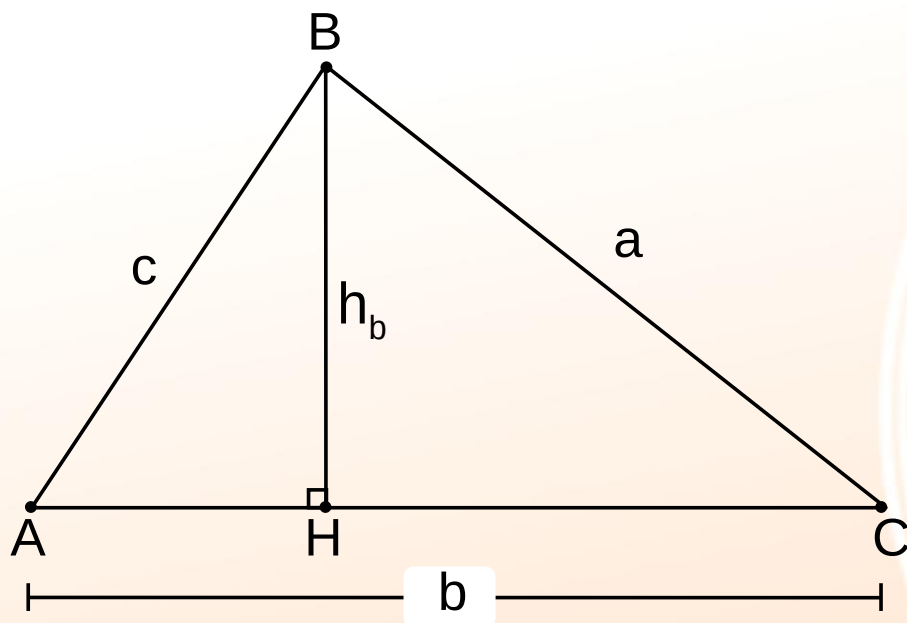
$$x^2 = 100 - 36$$

$$\therefore x = 8$$

Clave: C

Teorema de Herón

En todo triángulo, la longitud de una altura es igual al doble de la inversa de la longitud del lado al cual es relativa, multiplicado con la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y las diferencias de este con cada una de las longitudes de los lados.



$$h = \frac{2}{b} \sqrt{(p)(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

EJERCICIO 08

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O , se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{AO}$. Si $AO = 18$ u, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia tangente a los arcos AO , AB y a $\overline{OB}$ es

A) 4
D) 7

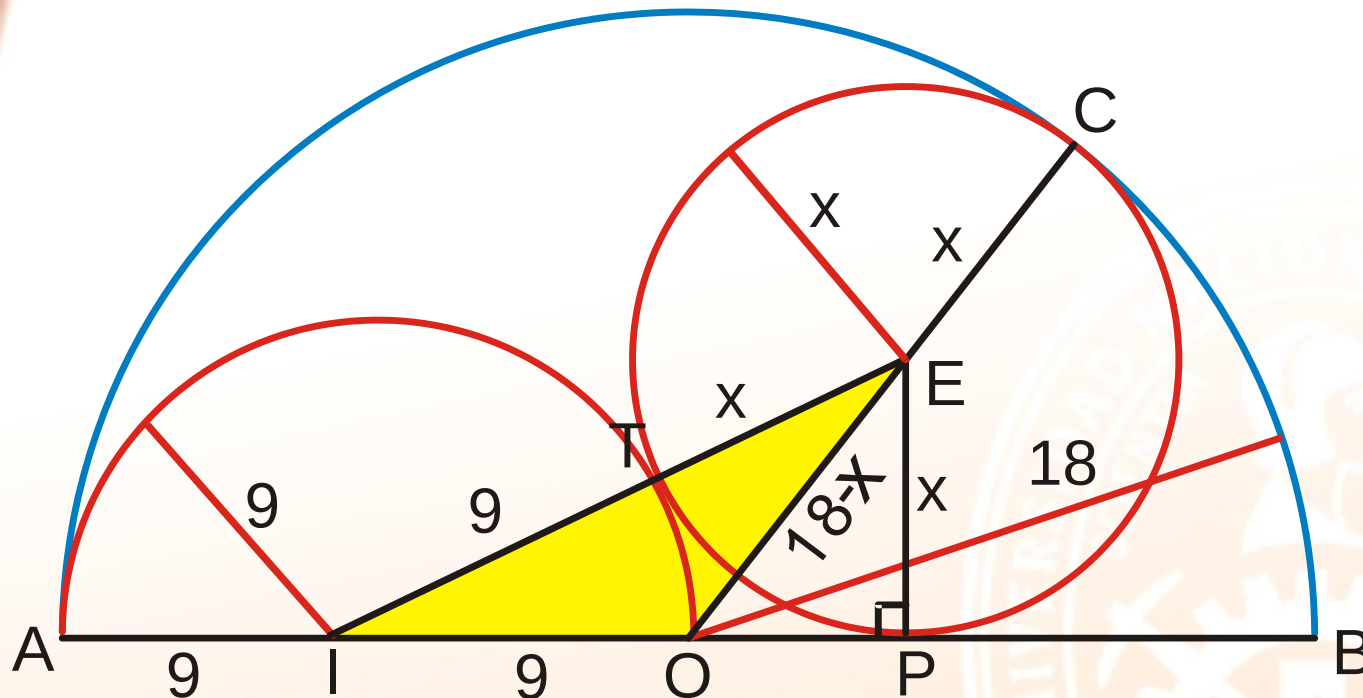
B) 5
E) 8

C) 6

ce
pre
UNI

RESOLUCIÓN 08

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{AO}$. Si $AO = 18$ u, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia tangente a los arcos AO, AB y a $\overline{OB}$ es



Piden: x

$$CE = x \quad y \quad OE = 18 - x$$

IT = 9, TE = x y EP = x

ΔΙΕΘ: Teorema de Heron

$$p = \frac{(9 + x) + (18 - x) + 9}{2} = 18$$

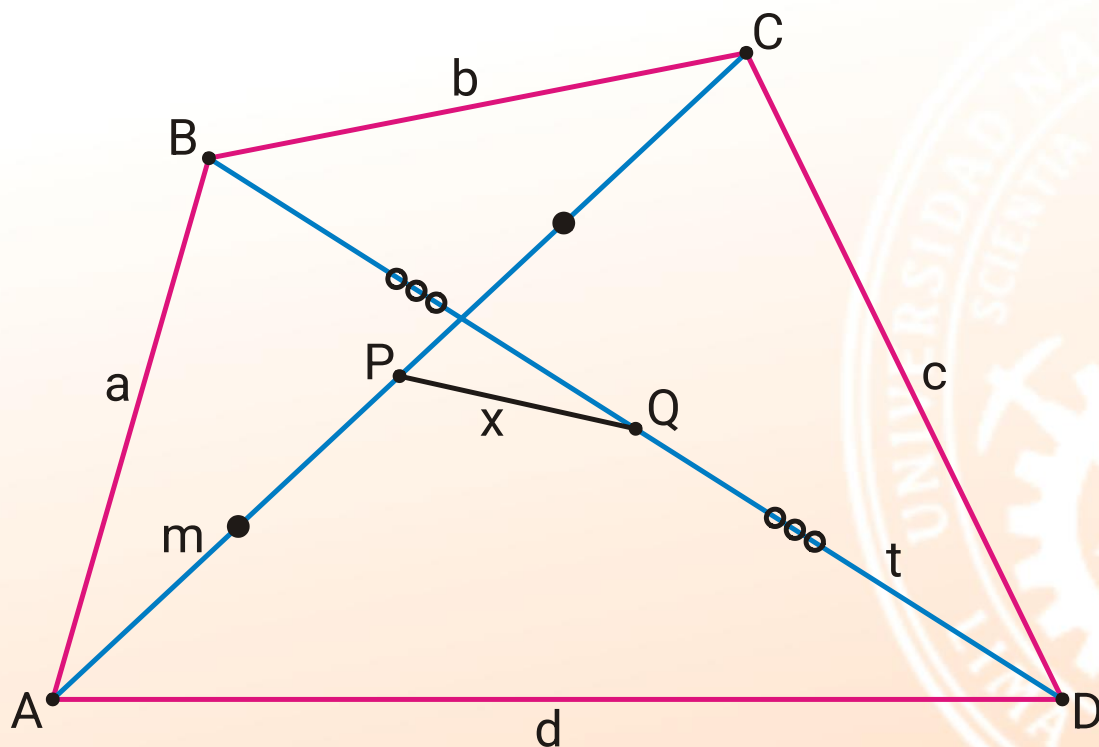
$$x = \frac{2}{9} \sqrt{(18)(9-x)(x)(9)}$$

$\therefore x = 8$

Clave: E

Teorema de Euler

En un cuadrilátero, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales, más cuatro veces el cuadrado de la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos medios de las diagonales.



$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + 4x^2$$

EJERCICIO 09

En un cuadrilátero $ABCD$ los ángulos ABC y ADC son rectos. Si $AB = BC$, $AD = 10$ u y la distancia de B a $\overline{AD}$ es 9 u, entonces la distancia (en u) entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ es

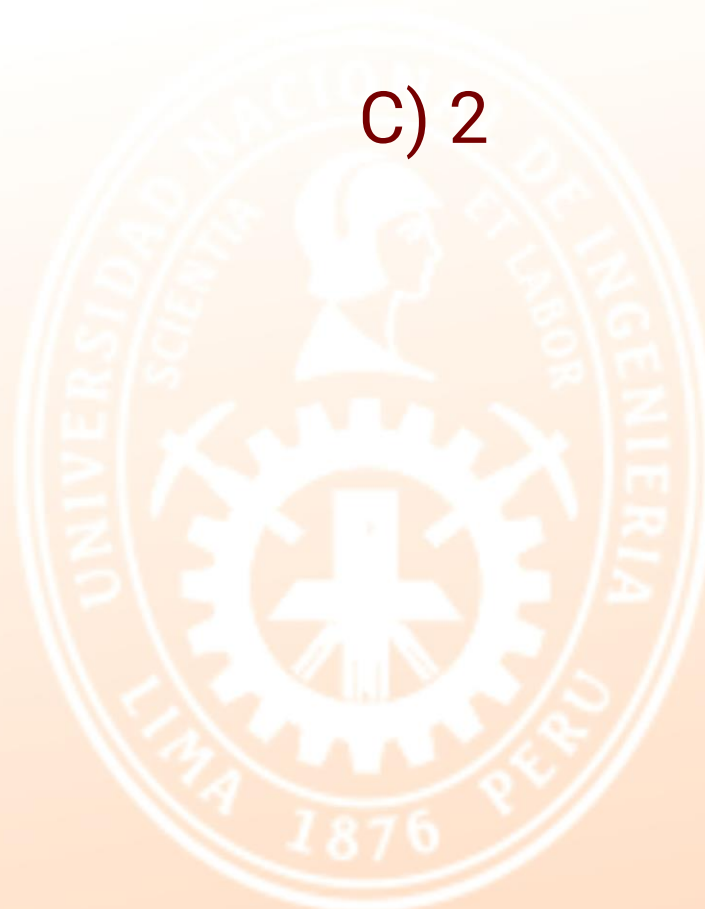
A) 1

B) 1,5

C) 2

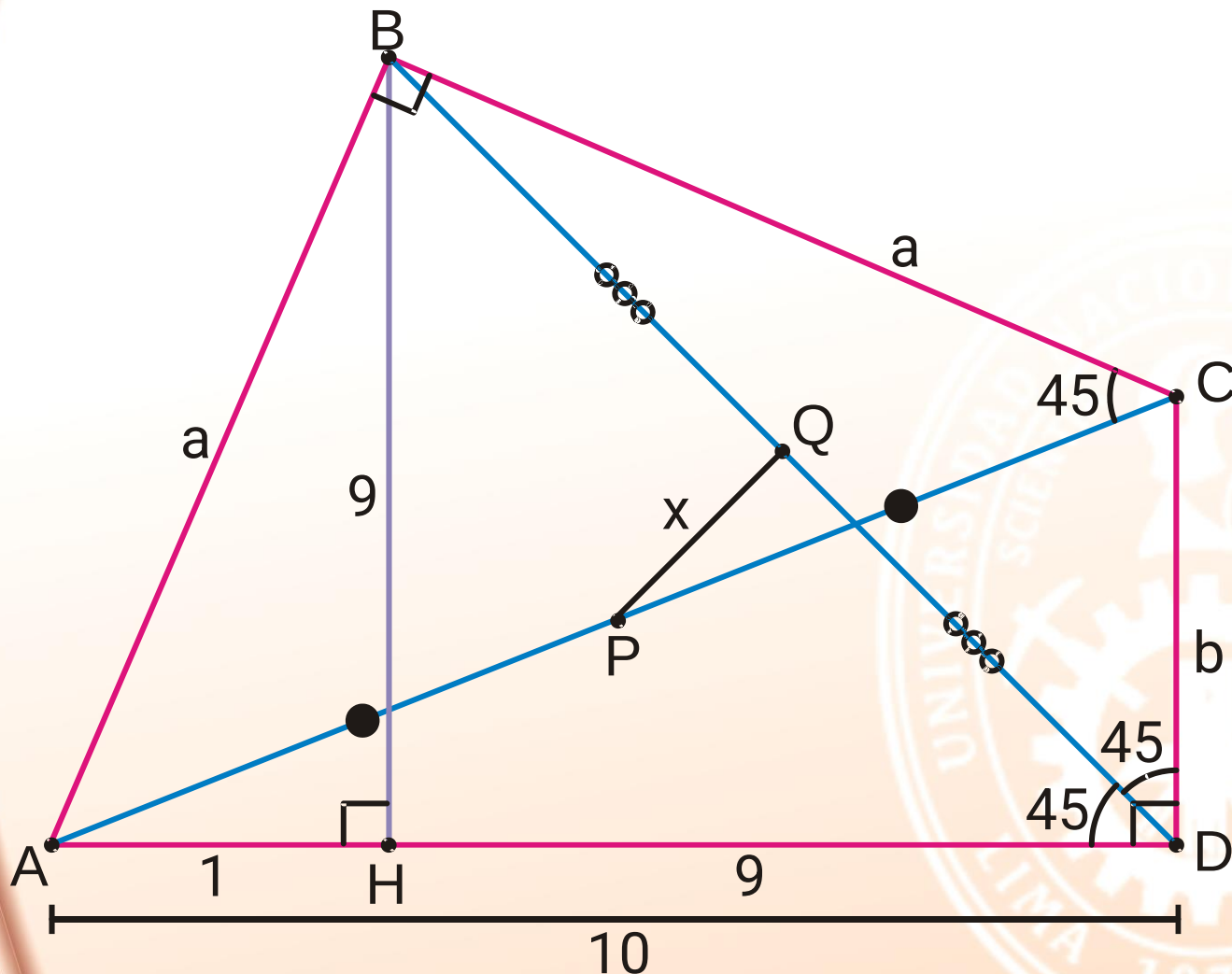
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

E) $\sqrt{2}$



RESOLUCIÓN 09

En un cuadrilátero ABCD los ángulos ABC y ADC son rectos. Si $AB = BC$, $AD = 10$ u y la distancia de B a $\overline{AD}$ es 9 u, entonces la distancia (en u) entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ es



$$PQ = x$$

$$\triangle ABC: m\angle ACB = 45$$

ABCD: inscriptible

$$m\angle ADB = m\angle ACB = 45 = m\angle BDC$$

Teorema de Euler:

$$a^2 + a^2 + b^2 + 10^2 = (\cancel{AC})^2 + (\cancel{BD})^2 + 4x^2$$

$$2a^2 = (BD)^2 + 4x^2$$

$$\triangle BHD: BH = HD = 9, \quad AH = 1$$

$$\text{y } BD = 9\sqrt{2}$$

$$\triangle AHB: AB = a = \sqrt{82}$$

Reemplazando:

$$2(\sqrt{82})^2 = (9\sqrt{2})^2 + 4x^2$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Clave: D



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS

ce
pre
UNI